ANEXO IV

Sistemas Dedutivos Formais

Sistemas estritamente lógico-formais foram desenvolvidos pela primeira vez no final do século XIX por vários matemáticos e filósofos, tendo atingido a sua forma definitiva nas primeiras três décadas do presente século. Aspectos essenciais destes sistemas, enquanto aplicáveis a este trabalho, podem, contudo, ser explicados mais convenientemente com referência à geometria dedutiva euclidiana.

Os *Elementos* de Euclides (ca. 300 a.C.) apresentam em 13 livros a ciência matemática e geométrica conhecida na época e contêm a primeira tentativa histórica de apresentar toda uma área de conhecimento, a da geometria métrica tridimensional sob a forma de um sistema axiomático-dedutivo.

No sistema euclidiano, as hipóteses iniciais foram cinco postulados (p.ex., "provar que é possível desenhar uma linha de qualquer ponto até qualquer outro") e cinco axiomas de "conceitos universalmente válidos" (p.ex., "se A for igual a B e B igual a C, então C é também igual a A"); tendo sido afirmado que, unicamente com base neles, seria possível deduzir *todas* as leis válidas da geometria e *somente* elas.

Atualmente, distinguimos mais claramente esses "conceitos universalmente válidos" dos axiomas específicos da geometria, já que eles estão subjacentes a todo sistema formal-dedutivo de matemática, não apenas à geometria. Axiomas puramente lógicos, que codificam certas conclusões lógicas permitidas, não ocorrem em Euclides de forma explícita. Entretanto, já antes de Euclides, casos específicos foram apresentados por Aristóteles no *Organon*.

A afirmação de Euclides, de que *todas* e *apenas* as leis válidas da geometria são deriváveis como teoremas a partir dos seus axiomas, corresponde aos conceitos lógico-formais modernos da *completude* dedutiva e *isenção de contradição* dos sistemas axiomáticos.

Afirmações de completude, na verdade, só permitem uma prova por absurdo: elas se demonstram falsas pela descoberta (construção) de uma lei nova e aparentemente verdadeira que não tenha sido, contudo, derivável na forma de teorema a partir do sistema axiomático. Estas leis novas, geralmente, não estão em contradição com os axiomas dados; elas podem ser absorvidas no sistema axiomático ou podem ser tornadas deriváveis por meio de uma transformação apropriada dos axiomas.

Isenção de contradição, naturalmente, é uma característica que é o *sine qua non* de qualquer conjunto de axiomas. Caso contrário, toda afirmação e sua contradição poderiam ser deduzidas como teoremas do sistema. Em seu livro *Fundamentos da Geometria* (1899), o famoso matemático de Göttingen, David Hilbert, apresentou um novo e detalhado sistema de axiomas para a geometria euclidiana, que satisfaz as mais severas exigências lógico-formais. O programa de Hilbert, em cuja elaboração ele foi ajudado por John von Neumann, levou à conclusão de que a isenção de contradição da aritmética era válida apenas com respeito aos métodos do denominado "finito" (e não dos infinitos perfeitos), correspondendo basicamente às operações que podem ser desenvolvidas por calculadoras eletrônicas. Este programa foi definitivamente demolido em 1931, graças ao célebre *Teorema da Indeterminação* de Kurt Gödel e a certas conseqüências dele decorrentes.

Gödel demonstra que, em um sistema matemático completo construído com a lógica formal, a afirmação que exige que o sistema seja livre de contradição é, em si própria, um princípio impossível de demonstrar a partir do sistema.

Isto deveria ter significado o fim dos sistemas dedutivos lógico-formais ou, pelo menos, da sua aplicação em matemática, física matemática etc. Porém, ocorreu precisamente o oposto na matemática "pura", especialmente após a II Guerra Mundial, sob a influência do "grupo Bourbaki" da França. A tentativa de submeter todos domínios da matemática a axiomas e formalismos está sendo estendida à força, para dizer o mínimo, à custa dos métodos geométrico-construtivos, os únicos aptos para o trabalho criador.

Especialmente destrutivo, no decurso desse desenvolvimento, foi o efeito da introdução da "nova matemática" dentro do escopo das chamadas reformas educacionais dos anos 60. Tarefas e construções geométricas, que constituíam os vestígios da geometria sintética no currículo, foram eliminadas e substituídas pela lavagem cerebral da teoria dos conjuntos, que já nada tinha a ver com o conceito de conjunto de Cantor, limitando-se somente à memorização de axiomas e definições, todos os quais só poderiam permanecer completamente incompreensíveis ao aluno.