ANEXO VII

Ordenação transfinita

As descobertas de Georg Cantor (1845-1898) entre os anos de 1870 - 1883, que mostram que o domínio do infinito lhe permite ser ordenado com o mesmo rigor que o finito, pertencem às mais belas e importantes questões da matemática.

Hoje em dia, na escola e na universidade, Cantor é considerado o criador da *Teoria* dos *Conjuntos*; ele mesmo preferia a expressão *Teoria dos Múltiplos* e uma grande parte do que hoje se ensina como teoria axiomática dos conjuntos no escopo da "Matemática Nova" o teria enchido de desgosto. Pois sua meta não era reduzir vários domínios da matemática a idéias primitivas de conjuntos, mas penetrar conceitualmente dentro da idéia, tanto filosófica quanto matemática, até então não elaborada e controversa, mas de longo alcance, do *infinito real.* Neste processo, ele tratou do problema com o mesmo rigor que Gauss ou seu aluno Weierstrass.

Cantor começou com o problema atacado por Bernhard Riemann em seu ensaio "Sobre a representabilidade de uma função por meio de uma série trigonométrica", submetido para a sua habilitação em Göttingen (1854), a respeito da representabilidade de funções arbitrárias como séries trigonométricas (Fourier) e, ao mesmo tempo, se deixou guiar filosoficamente pelo pensamento de Platão, Santo Agostinho, Leibniz (e em parte, também São Tomás de Aquino) sobre o infinito real.

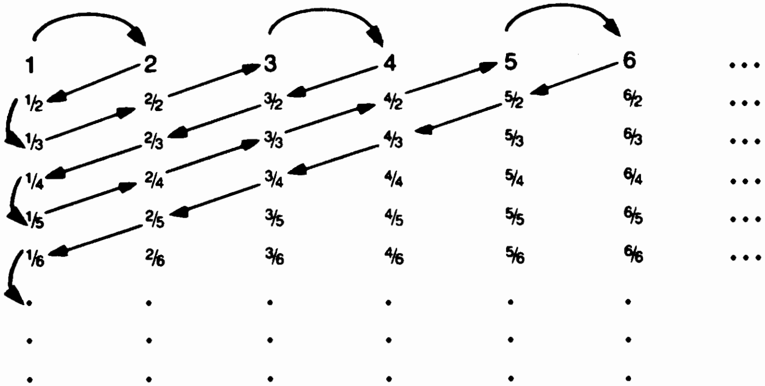
O problema consistia em descobrir se existem conjuntos infinitos que sejam diferentes em magnitude. Por exemplo, Galileu Galilei, em seus *Discorsi* de 1638, apresentou o enigma de se os quadrados 1, 4, 9, 16 etc. podem ou não ser justamente tantos em número quanto os números naturais 1, 2, 3, 4 etc. - pois não estariam mais esparsamente distribuídos com o aumento da magnitude? Ele escreveu as linhas próximas uma da outra:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & \dots \end{matrix}$$

e pensou que entre agregados infinitos fosse impossível comparar magnitudes. Embora isto seja correto no caso de números que sejam quadrados, isto não pode ser asseverado em geral, como demonstrou Cantor. Contudo, o método usado por Galileu foi útil, pois a ordenação um-a-um (biunívoca) dos dois agregados infinitos, que desta forma puderam ser mapeados um sobre o outro, mostrou que eram de "mesma magnitude".

A mesma questão se colocava com relação às frações e aos números racionais, mais dificilmente do que com quadrados. Pois entre 0 e 1 já existem infinitos números racionais, tais como a série 1/2, 1/3, 1/4 etc.; e entre cada número natural e o seguinte colocam-se novamente infinitas frações. Cantor inventou um método especial, o "método diagonal", para provar que os números racionais também estão em uma relação um-a-um com os números naturais 1, 2, 3, 4, ..., apesar do fato de que já há uma infinidade completa entre 0 e 1.

A demonstração se faz assim, de forma simplificada: Cantor reduziu todos números racionais a frações, achou um sistema para ordená-los e os colocou da seguinte forma:



Então, começando de 1, ele faz o caminho mostrado no conjunto acima, de maneira que encontra a seqüência linear 1, 2, 1/2, 1/3, 2/2, 3, 4, 3/2, ..., que contém todos números racionais possíveis.

Como aconteceu com os quadrados, neste processo, o quinto axioma de Euclides ("o todo é maior do que suas partes") foi decisivamente contestado. Cantor escreve em 1887: "Não há contradição quando, como freqüentemente acontece com conjuntos infinitos, dois deles - um dos quais é uma parte constituinte do outro - têm [o mesmo número de elementos]. Vejo o erro nesta questão como o principal obstáculo que, desde a antigüidade, impediu a introdução de números infinitos".

Cantor, todavia, não acreditava que diferentes conjuntos infinitos de pontos pudessem sempre ser mapeados um a um entre si. Este não era o caso, como ele demonstrou, das frações decimais infinitas. A demonstração (simplificada) de Cantor é a seguinte:

Chamamos de M o conjunto de todas frações decimais infinitas (dízimas não-periódicas) entre 0 e 1, números como 0,1213... ou 0,4999... Agora afirmo que com *cada* tentativa de simplesmente ordenar os números naturais com as frações decimais em *M*, pelo menos uma fração decimal fica necessariamente sem correspondência. Uma lista de pares mutuamente ordenados de números pode parecer algo como:

1 e 0,397...
2 e 0,216...
3 e 0,752...
etc.

Agora construamos uma fração decimal de acordo com uma especificação ardilosa: antes da vírgula, assim como com todas as frações decimais que pertencem a *M*, coloquemos um zero. Como *primeiro* número depois da vírgula, escolhemos um número que seja diferente do *primeiro* número da *primeira* fração decimal de nossa lista; como *segundo* número, um valor que seja diferente do *segundo* número da *segunda* fração decimal; como *terceiro* número, um valor que seja diferente do *terceiro* número da *terceira* fração decimal etc. Esta nova fração decimal não é, portanto, igual à primeira fração decimal da lista (pois dela se distingue na primeira casa decimal); tampouco é igual à segunda fração decimal da lista (pois dela se distingue na segunda casa decimal) e vemos, portanto, que ela não é igual a *qualquer* das frações decimais da lista... Com isto, fica provado que é completamente impossível casar todas frações decimais entre 0 e 1 com os números naturais. O conjunto destas frações decimais é tão grande, é infinito em tão alto grau, que de longe ultrapassa o infinito dos números naturais.

Assim, Cantor provou que existem gradações do infinito. A um conjunto infinito, que pode ser associado um-a-um com o conjunto dos números naturais, ele deu o número ordinal *w*. Este era agora o primeiro *número infinito*. A este conjunto pertencem, entre outros, os números pares e os ímpares, os quadrados e os racionais.

Depois que Cantor já provara em 1873 que a) os números racionais (frações) podem ser mapeados um a um sobre os números naturais, mas que b) tal ordenação um a um entre os números reais (pontos do contínuo linear, por exemplo, dízimas) e os números naturais não é possível; que, portanto, no domínio do infinito existem em definitivo conjuntos de duas *potências* fundamentalmente diferentes, ele se colocou a pergunta se talvez o conceito de espaço poderia levar a uma maior diferenciação do infinito. Para grande surpresa sua e de Dedekind (com quem se correspondia a este respeito), e para grande pesar de outros matemáticos (especialmente Kronecker), em 1877, Cantor conseguiu dar a prova de que a resposta a esta questão é "não": todos os pontos de uma superfície (por exemplo, um quadrado unitário) podem ser mapeados em uma correspondência um a um com os pontos de uma linha (por exemplo, o intervalo fechado [1,0]). A dimensão espacial não se deixa, portanto, definir por uma gradação determinada do infinito real.

Cantor escreveu a respeito a Dedekind: "Deveríamos procurar a distinção entre o mapeamento de várias dimensões, muito mais em outras características do que os números considerados [por Riemann como] característicos de coordenadas independentes". Aqui, ele se referia à tese de habilitação de Riemann, *Sobre as hipóteses subjacentes à geometria.*

Este argumento fornecia, agora, a prova da fertilidade da formação de conceitos por Cantor também para o domínio da geometria e da topologia; e, ao mesmo tempo, na idéia de *potência* de conjuntos (infinitos), ele obteve o princípio que lhe permitiu formular a sua teoria do *transfinito* em *Fundamentos de uma teoria geral dos conjuntos* (1882-83), independentemente do conceito de dedução a partir de conjuntos de pontos, e levar isto à coroação de uma conclusão preliminar.

O *infinito real* possui determinadas ordenações e gradações, contruídas de acordo com princípios hereditários autoreflexivamente ativos e, portanto, inteligivelmente representados: o *primeiro princípio hereditário* foi definido por Cantor como "adição da unidade a um número dado, já formado". O *segundo princípio hereditário* é "que quando qualquer sucessão determinada de números reais inteiros definidos é apresentada, da qual não existe maior ... um novo número é criado, imaginado como o *limite* daqueles números, isto é, definido como o próximo número maior depois de todos eles".

O primeiro princípio descreve a gênese da seqüência de números inteiros positivos, o segundo assegura a transição para o transfinito. Um terceiro, chamado de "princípio limitante" - "embarcar na criação de um novo número inteiro com a ajuda dos dois princípios [anteriores], só [então] quando a totalidade de todos números precedentes possui, com respeito ao seu domínio, a potência de uma classe de números já disponível e definida" - divide o domínio dos números ordinais transfinitos em classe de números definidamente sequenciais, bem ordenados, que se revelam "oferecendo-se, de uma forma unificada, como os representantes naturais da seqüência definida de potências crescentes de conjuntos bem definidos", como ordenação bem definida do transfinito (*Hipóteses*, Seção 1).

Esta ordenação definidamente crescente dá a ordenação transfinita do *infinito real*, distinto do *mau infinito* obtido monotamente pela soma de mais 1 ao final. Não se pode fazer nada com o mau infinito; por outro lado, o conceito do transfinito é a chave para as leis do Universo e da mente humana criadora.