ANEXO VIII

Curvas não-algébricas e curvatura negativa

Existem, basicamente, dois tipos diferentes de superfícies curvas: aquelas com *curvatura positiva* e as com *curvatura negativa.* No primeiro tipo (comumente chamadas convexas-convexas ou côncavas-côncavas), todas as curvas (seções normais) que nascem do corte da superfície por um plano a ela perpendicular são curvadas na mesma direção. Os centros de curvatura estão todos do mesmo lado da superfície. Exemplos típicos são a esfera e a parte externa de um toro. Estas superfícies têm *curvatura positiva.*

O segundo tipo (também chamadas convexas-côncavas ou côncavas-convexas) possui em cada ponto duas direções contrárias de curvatura; os centros de curvatura estão localizados em lados diferentes da superfície. Estas superfícies são de *curvatura negativa.* O exemplo mais familiar é a forma de sela.

Entre as superfícies curvas, são especialmente interessantes as de curvatura positiva ou negativa *constante.* A superfície típica com curvatura positiva constante é a esfera. No século XIX, Eugenio Beltrami em especial se dedicou a investigar exaustivamente as superfícies de curvatura negativa constante.

Há três tipos básicos destas, que surgem todas da rotação de diferentes segmentos da *tractriz* (literalmente "linha de arrasto"): a) a superfície de rotação pseudo-esférica-elíptica, que também corresponde à superfície de rotação de uma *cáustica* (literalmente "linha de queima"); b) a superfície de rotação pseudo-esférica parabólica, ou "pseudo-esfera"; e c) a superfície de rotação pseudo-esférica hiperbólica.

As duas curvas, a cáustica e a tractriz, são curvas não-algébricas. Essas curvas foram bastante investigadas por Fermat, Pascal, Leibniz, Huyghens, Bernoulli e seus colaboradores, bem como posteriormente por Gaspard Monge na *École Polytechnique*. Descartes, por um lado, quis excluí-las da geometria, já que não podiam ser construídas nem com régua e compasso, nem com simples equações algébricas. Leibniz pensava que isto era insano, pois tais curvas, afinal de contas, pertencem ao Universo real. Mais adiante, veremos com que freqüência elas ocorrem na natureza e na arte.

A mais simples dessas curvas não-algébricas é a *ciclóide* (literalmente "linha da roda"). Ela se origina do movimento de um ponto sobre um círculo (roda) que rola sobre um plano. Outras ciclóides podem ser criadas quando se rola um círculo ao longo do interior ou exterior de um outro círculo.

As ciclóides têm característicamente propriedades óticas. A ciclóide que se origina rolando um círculo dentro de um semicírculo cujo raio seja o dobro do diâmetro do círculo em rolamento é chamada a cáustica, em ótica (Figuras 10a e 10b).

A catenária se origina, como diz o nome, quando uma corrente pende entre dois pontos fixos (Figura 11a). Obtemos a mesma curva quando mergulhamos dois fios paralelos uma ao outro em água com sabão e os puxamos para fora. A água com sabão forma uma superfície mínima, a superfície de rotação da catenária (Figura 11b). Podemos, contudo, também construí-la rolando uma parábola sobre uma superfície plana marcando o foco da parábola.

Qualquer criança pode fazer uma tractriz. Usamos um barbante para ligar um objeto próximo ao trilho de um trenzinho de brinquedo se movendo em nível. Qunado o trenzinho puxar esse objeto, sua trajetória será uma *tractriz*, ou "linha de arrasto".

A tractriz também é gerada como *evoluta* da catenária. A

Figura 10a. Uma Hipotrocóide
Uma hipotrocóide é uma ciclóide na qual um círculo rola ao longo do exterior de um círculo maior. A mesma hipotrocóide é gerada quando o círculo menor rola por dentro do semicírculo maior. Nesse caso, o raio do semicírculo corresponde ao dobro do diâmetro do círculo que rola e é formada a cáustica. A Figura 10a corresponde à representação de uma cáustica por Leonardo da Vinci na Figura 10b.

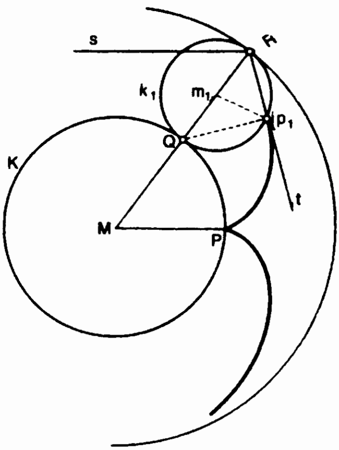
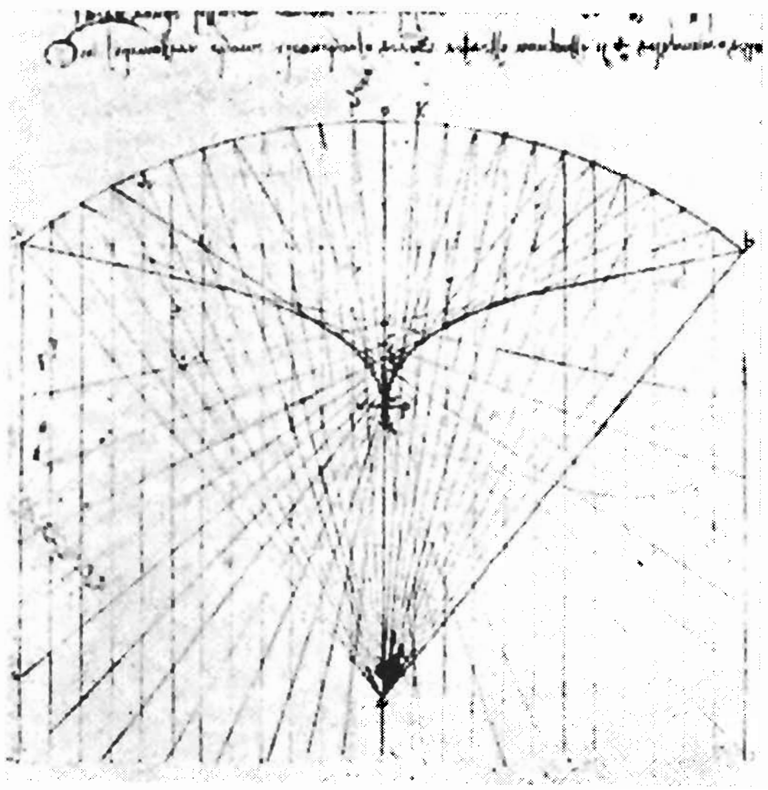
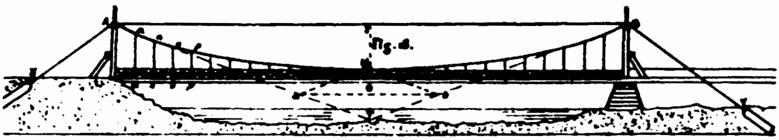


Figura 10b.





11a.

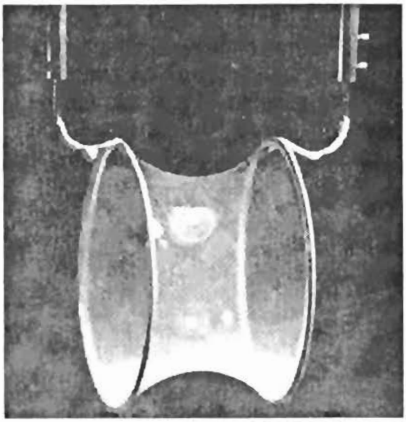


Figura 11a. A catenária é a base da ponte suspensa.

Figura 11b. A fotografia da superfície de rotação de uma catenária: uma catenóide de água com sabão como curva de separação entre dois anéis paralelos.

evoluta é o lugar geométrico dos centros de curvatura. Em uma construção, ela ocorre como a *envolvente* das normais de uma curva (Figura 12). Cada curva é, por sua vez, uma evoluta de sua involuta. As evolutas de uma ciclóide são novamente ciclóides.

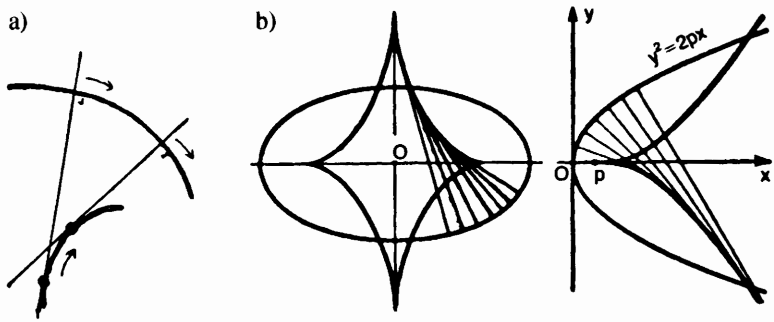


Figura 12. Involuta, Evoluta e Envoltória
a) Relação entre envoluta e evoluta; b) evoluta de uma elipse e parábola, construída como envoltória da família de normais à curva. Cada curva é a evoluta de sua involuta.

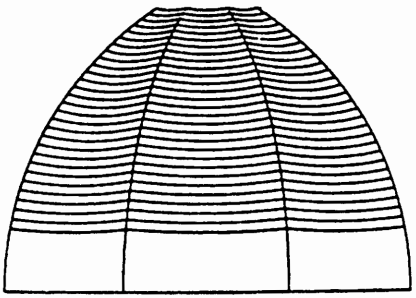


FIGURA 13. O Domo de Brunelleschi.
O domo de Florença, projetado por Filippo Brunelleschi entre 1404-1420 e completado em 1436. As superfícies negativamente curvadas entre as costelas foram formadas por famílias de catenárias.

(Desenho de Leandro Bartoli)

Ciclóides, cáusticas, catenárias e tractrizes são todas curvas reais, físico-geométricas, que ocorrem na natureza e desempenham um papel decisivo na construção de pontes e outras estruturas. Elas não podem ser construídas por meio de métodos algébricos comuns.

A catenária ocorre, por exemplo, na construção do domo de Florença (mostrado na capa deste livro). À primeira vista, o domo de Brunelleschi parece ter curvatura positiva. Entretanto, como esclarece o desenho do prof. Leandro Bartoli (Fig. 13), as superfícies entre as costelas da cúpula são curvadas em direção ao interior. São superfícies de curvatura negativa. Originaram-se de catenárias, formadas a partir da suspensão real de correntes entre as costelas.